ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG ÁNH

TÍNH CHẤT HÌNH HỌC CỦA NGHIỆM CỦA MỘT SỐ ĐA THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG ÁNH

TÍNH CHẤT HÌNH HỌC CỦA NGHIỆM CỦA MỘT SỐ ĐA THỨC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN TẤT THẮNG

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}^+$	tập số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclid n chiều
$\mathbb{C}$	tập số phức
$\mathbb{N}^*$	tập số tự nhiên khác 0

Mở đầu

Định lý cơ bản của đại số khẳng định rằng mọi đa thức khác hằng với hệ số phức đều có ít nhất một nghiệm phức. Mỗi số phức có thể biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng phức. Các tính chất hình học của nghiệm của một đa thức được nhiều người quan tâm. Kết quả sau cho ta mối quan hệ giữa nghiệm của đạo hàm của một đa thức với nghiệm của đa thức đó.
Định lý Gauss - Lucas: Cho P là đa thức khác hằng. Khi đó, nghiệm của P' nằm miền trong của bao lồi của các nghiệm của P.
Trong trường hợp P là đa thức bậc ba, các nghiệm của P' được mô tả cụ thể hơn trong định lý sau.
Định lý Siebeck: Cho $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ là các số phức không cộng tuyến. Khi đó các nghiệm ω_1, ω_2 của hàm

$$F(z) = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3}$$

là các tiêu điểm của elip tiếp xúc với ba cạnh của tam giác tạo bởi z_1, z_2, z_3 tại các trung điểm của các cạnh của tam giác đó.

Mục tiêu của luận văn này là trình bày lại các kết quả trên đồng thời trình bày lại các nghiên cứu gần đây về hình học của nghiệm của một số lớp các đa thức. Nội dung luận văn gồm 3 chương sau:
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị: Nhắc lại một số khái niệm và tính chất cần thiết bao gồm: Bao lồi, tâm tỉ cự, phép biến đổi tuyến tính.
Chương 2. Định lý Siebeck cho đa thức bậc ba: Trình bày tính chất hình học của các điểm tới hạn của một đa thức bậc ba. Cụ thể hơn, cho P là một đa thức bậc ba, khi đó các nghiệm của đạo hàm P' được gọi là

các điểm tới hạn của P. Theo định lý Gauss - Lucas, thì các điểm đó nằm miền trong của tam giác tạo bởi ba đỉnh là các nghiệm của P, ở đây giả sử P có ba nghiệm phân biệt. Định lý Siebeck cho đa thức bậc ba mô tả cụ thể vị trí của các điểm tới hạn đó. Trong chương 2 trình bày một kết quả mở rộng của Định lý Siebeck bậc ba. Trong đó phương pháp sử dụng chủ yếu là các tính chất hình học phẳng và các phép biến đổi tuyến tính trên mặt phẳng.

Chương 3. Đa thức tự nghịch đảo: Trình bày về đa thức tự nghịch đảo, đó là lớp các đa thức có tập nghiệm "đối xứng" nhau qua đường tròn đơn vị. Phần đầu của Chương 3 trình bày một số tính chất và đặc trưng của các đa thức tự nghịch đảo. Phần còn lại giới thiệu một số lớp các đa thức tự nghịch đảo cụ thể và đưa ra một tính chất hình học của nghiệm của các đa thức đó.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập, nghiên cứu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy, cô trong khoa Toán - Tin, trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Tất Thắng - người đã trực tiếp giúp đỡ, hướng dẫn về kiến thức, tài liệu và phương pháp để tác giả hoàn thành đề tài nghiên cứu khoa học này. Tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, cổ vũ, khích lệ và giúp đỡ trong thời gian qua.

Thái Nguyên, tháng......năm........

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Hồng Ánh

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhắc lại một số kiến thức cơ bản được sử dụng trong luận văn.

1.1 Bao lồi và tâm tỉ cự của hệ điểm

Định nghĩa 1.1.1 Tập con $H \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là lồi nếu với mọi $x, y \in H$, $t \in [0; 1]$ thì

$$tx + (1-t)y \in H.$$

Bổ đề 1.1.2 *Tập $H \subset \mathbb{R}^2$ là lồi khi và chỉ khi với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in H$ và $t_1, t_2, ..., t_n \in [0; 1]$ mà $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$ thì*

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in H.$$

Chứng minh. Nếu H là tập lồi, ta chứng minh khẳng định trong bổ đề bằng quy nạp theo n.

Với $n = 1$: Hiển nhiên đúng.

Với $n = 2$: Đúng theo định nghĩa của tập lồi.

Giả sử khẳng định đúng đến $n = k$. Lấy $x_1, x_2, ..., x_{k+1} \in H; t_1, t_2, ..., t_{k+1} \in [0; 1]$ mà $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$. Khi đó

$$x = \frac{t_1}{t_1 + t_2} x_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} x_2 \in H.$$

Theo giả thiết quy nạp

$$\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i = (t_1 + t_2)x + \sum_{i=2}^{k+1} t_i x_i \in H.$$

Từ đó, theo nguyên lý quy nạp ta được

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in H,$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, ..., t_n \in [0;1]$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ và $x_1, x_2, ..., x_n \in H$. Điều ngược lại hiển nhiên đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 1.1.3 Cho $U \subset \mathbb{R}^2$. Bao lồi của U được định nghĩa là tập lồi nhỏ nhất của $\mathbb{R}^2$ chứa U. Kí hiệu là $convU$.

Mệnh đề 1.1.4 *Bao lồi của U được xác định như sau*

$$convU = \left\{ t_1 x_1 + ... + t_n x_n ; n \in \mathbb{N}, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, x_i \in U, \forall i \right\}.$$

Chứng minh. Đặt

$$H := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i ; n \in \mathbb{N}, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, x_i \in U \right\}.$$

Trước hết, ta chứng minh H là một tập lồi chứa U. Thật vậy, lấy $u \in U$ thì $1.u \in H$. Vậy $U \subset H$. Xét

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in H, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, x_i \in U,$$

và

$$u_2 = \sum_{j=1}^{m} s_j y_j \in H, s_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m} s_j = 1, y_j \in U.$$

Lấy $t \in [0;1]$, ta có

$$tu_1 + (1-t)u_2 = \sum_{i=1}^{n} t t_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-t) s_j y_j.$$

Nhận thấy

$$\sum_{i=1}^{n} tt_i + \sum_{j=1}^{m} (1-t)s_j = t + 1 - t = 1.$$

Nên $tu_1 + (1-t)u_2 \in H$. Tức là H là một tập lồi. Vậy $convU \subset H$.

Ngược lại, lấy $t_1, t_2, ..., t_n \in [0;1]$ mà $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ và $x_1, x_2, ..., x_n \in U$. Do đó

$$x_1, x_2, ..., x_n \in convU.$$

Vì $convU$ là một tập lồi nên theo Bổ đề 1.1.2, ta có

$$t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n \in convU.$$

Vậy $H \in convU$. Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 1.1.5

(1) conv $\{a, b\}$ *là đoạn thẳng nối* a *và* b*, với* $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) Với ba điểm $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ *thì conv* $\{A, B, C\}$ *là tam giác với ba đỉnh* A, B, C.

Theo mệnh đề trên, nếu điểm x thuộc bao lồi của tập hữu hạn điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ trên $\mathbb{R}^2$ thì tồn tại $t_1, t_2, ..., t_n \in [0;1]$ mà $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ và $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$. Khi đó ta nói x là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ đối với bộ hệ số $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$.

Đối với bộ hệ số bất kì, ta cũng có khái niệm tương tự. Trước hết ta có tính chất sau.

Bổ đề 1.1.6 *Trên mặt phẳng cho* n *điểm* $A_1, A_2, ..., A_n$ *và các số thực* $t_1, t_2, ..., t_n$ *mà* $t_1 + t_2 + ... + t_n \neq 0$. *Khi đó, tồn tại duy nhất điểm* G *mà*

$$t_1\overrightarrow{GA_1} + t_2\overrightarrow{GA_2} + ... + t_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Chứng minh. Gọi O là gốc tọa độ. Khi đó

$$t_1\overrightarrow{GA_1} + t_2\overrightarrow{GA_2} + ... + t_n\overrightarrow{GA_n} = \sum_{i=1}^{n} t_i\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{n} t_i\overrightarrow{OA_i}.$$

Chọn G sao cho

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \overrightarrow{OA_i} \right).$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 1.1.7 Ta gọi điểm G trong Bổ đề 1.1.6 là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ đối với bộ hệ số $(t_1, t_2, ..., t_n)$. Nếu $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, ta nói bộ $(t_1, t_2, ..., t_n)$ là tọa độ tỉ cự của điểm G đối với hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$.

Ví dụ 1.1.8

(1) Cho đoạn thẳng AB. K là điểm nằm giữa A, B sao cho $KA = \frac{1}{3}KB$, khi đó điểm K là tâm tỉ cự của hệ hai điểm $\{A, B\}$ với tọa độ tỉ cự là $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$ vì

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{KA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{KB} = \vec{0}.$$

(2) Trung điểm I của đoạn thẳng AB là tâm tỉ cự của hệ hai điểm $\{A, B\}$ với tọa độ tỉ cự là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ vì

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

(3) Trọng tâm G của tam giác ABC là tâm tỉ cự của hệ ba điểm $\{A, B, C\}$ với tọa độ tỉ cự là $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ vì

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

(4) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi O, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, MN, khi đó điểm O là tâm tỉ cự của hệ bốn điểm $\{A, B, C, D\}$ với tọa độ tỉ cự là $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ vì

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

Đối với một hệ điểm bất kì cho trước thì mọi điểm trên mặt phẳng đều là tâm tỉ cự cuả hệ điểm đó đối với một bộ hệ số nào đó. Điều đó thể hiện trong mệnh đề sau.